

Università degli Studi di Brescia  
Facoltà di Ingegneria  
Dipartimento di Elettronica per l'Automazione



## La logica fuzzy

Ing. Fabio Tampalini



## Fonti

- Ci sono moltissimi testi disponibili sulla fuzzy logic.
- Il motore di ricerca google fornisce ottimi link per questo argomento.
- Esistono documenti nella pagina del corso di robotica.
- <http://www.ce.unipr.it/people/bianchi/Research/ProgettoFuzzy/home.html>



## Un po' di storia (1)

- La logica fuzzy si discosta dalla logica detta “classica” che è caratterizzata dall'essere bivalente.
- Quest'ultima rispetta il principio di non contraddizione e il principio del terzo escluso. Ricordiamo brevemente che il primo principio afferma che un generico elemento “ $x$ ” non può appartenere contemporaneamente ad un insieme “ $A$ ” ed al suo complemento “ $A^c$ ”; il secondo principio afferma che l'unione di un insieme con il suo complemento produce l'insieme universo, chiamato “ $X$ ”, al quale appartiene qualunque elemento “ $x$ ”.
- Questo è quanto mai lontano dal modo di ragionare dell'uomo, che invece adotta una logica sfumata, fuzzy appunto.



## Un po' di storia (2)

- Si pensi, ad esempio, alle frasi che vengono quotidianamente pronunciate: “oggi la temperatura è bassa”, “quella persona è alta”,... Nessuna di queste è quantitativa e, anche se non riusciamo a darne una definizione precisa, il contesto ci consente ogni volta di decidere il significato da attribuire a quei termini.
- Il concetto di logica fuzzy è stato introdotto nella comunità scientifica da Lotfi Zadeh (Professore di Ingegneria dell'Università di Berkeley), quando nel 1965, in un suo articolo, espose alcuni esempi di fuzzy set.



## Gli insiemi fuzzy (1)

- Zadeh, nel suo articolo, pose questo esempio: si pensi all'insieme "animali", i "cavalli" e i "cani" vi appartengono, mentre le "rocce" no; oppure si pensi a due insiemi che si intersecano: l'insieme degli uomini e l'insieme degli studenti.



## Gli insiemi fuzzy (2)

- In questi casi non ci sono problemi di rappresentazione, ma cosa dire per la definizione della classe delle persone povere? Zadeh fece giustamente notare che "Se una persona con un reddito annuo di mille euro è povera, e riteniamo ragionevole pensarlo, allora lo è anche una persona con un reddito di mille euro più cento euro".
- Questo può portare, mediante ricorsività, e senza porre una soglia, a pensare che una persona con un reddito di un milione di euro all'anno sia da ritenersi povera, cosa che non si può proprio definire vera.
- Per evitare questo problema dovuto alla bivalenza della logica classica, Zadeh propose di permettere al grado di appartenenza di prendere un qualunque valore compreso tra "0" e "1", chiamando insiemi fuzzy gli insiemi così definiti.



## Gli insiemi fuzzy (3)

- Quindi il grado di appartenenza di un oggetto a un insieme può essere anche interpretato come il “grado di verità” dell'affermazione “l'oggetto appartiene all'insieme”.
- La logica fuzzy che si ottiene in questo modo estende la logica tradizionale a due valori, “0” e “1” (vero e falso), permettendo un “continuo di sfumature” di verità.



## Gli insiemi fuzzy (4)

- Si pensi, ad esempio, agli insiemi di “ragazzi” e “adulti”.
- La loro intersezione è sfumata come lo è anche il loro contorno. In altri termini, i concetti di “adulti” e di “ragazzi” che abbiamo in mente sono compatibili con un'appartenenza graduale degli elementi ad entrambi gli insiemi nella zona sfumata.



## Gli insiemi fuzzy (5)

- Per usare la logica fuzzy è necessario suddividere il range dei valori assumibili in più funzioni, le quali possono avere le forme più disparate, anche se di solito sono sufficienti triangoli, trapezi o gaussiane.
- Dato un ingresso crisp, gli viene associato un numero reale (compreso tra "0" e "1") per ogni funzione di appartenenza (detta membership function) mediante il processo di fuzzyficazione.

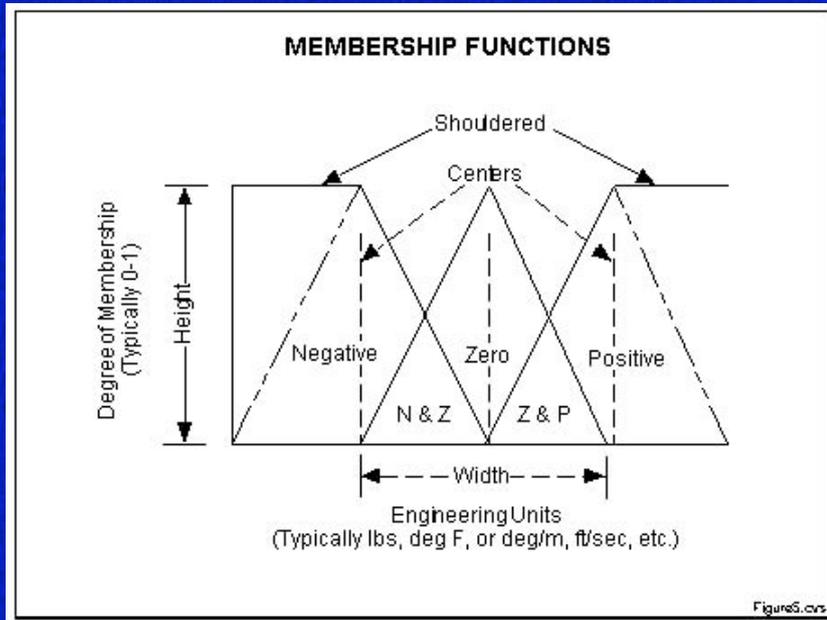


## Terminologia (1)

- SHAPE - triangular is common, but bell, trapezoidal and exponential have been used
- HEIGHT or magnitude (usually normalized to 1)
- WIDTH (of the base of function)
- SHOULDERING (locks height at maximum if an outer function. Shouldered functions evaluate as 1.0 past their center)
- CENTER points (center of the memberfunction shape)
- OVERLAP (N&Z, Z&P, typically about 50% of width but can be less).



## Terminologia (2)



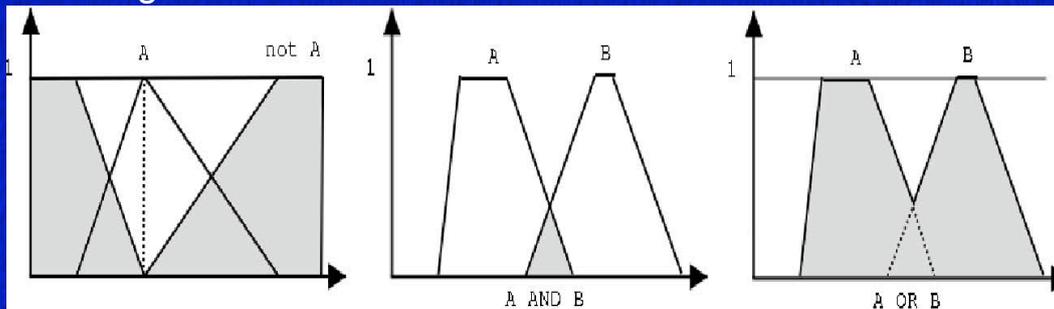
## La logica fuzzy (1)

- Come già esposto, nella logica fuzzy, il grado di verità di una proposizione è fuzzy e assume, solitamente, valori compresi tra "0" e "1".
- Nella logica fuzzy si possono avere tutti gli elementi della logica del primo ordine: disgiunzione, congiunzione, negazione, implicazione, equivalenza.
- In più si possono usare espressioni del tipo:
  - predicati fuzzy, che possono essere parzialmente veri (vecchio, alto,...);
  - modificatori fuzzy, che servono per modificare il valore di verità di una formula logica (molto, abbastanza,...);
  - quantificatori fuzzy, che quantificano gli elementi che prendono parte ad una formula (pochi, tanti,...).



## La logica fuzzy (2)

- Le operazioni che vengono usate con più frequenza sono la negazione, la disgiunzione e la congiunzione. Se il grado di appartenenza è normalizzato, si può dire che:
  - l'intersezione coincide con AND e con la T-norm;
  - l'unione coincide con OR e con la T-conorm;
  - la negazione coincide con NOT.



## Le regole fuzzy (1)

- Una regola fuzzy è del tipo IF-THEN il cui antecedente è una combinazione logica di clausole, ognuna delle quali ha la seguente struttura:  
    <variabile> IS <etichetta>
- Dove etichetta è un label che denota una funzione di appartenenza.
- Mentre l'antecedente può "essere costruito" con AND, OR e NOT, nel conseguente si può adottare solo l'operatore AND.
- Per l'operazione di inferenza, quindi, si deve eseguire per ogni regola il calcolo dell'antecedente e impostare il conseguente con il valore ottenuto eventualmente pesato con il grado di forza associato alla regola.



## Le regole fuzzy (2)

- La combinazione del grado di appartenenza ad una membership function per le variabili di uscita si esegue mediante l'operatore OR.
- Ottenuto, per ogni funzione di appartenenza, il grado di credibilità è possibile eseguire la defuzzyficazione per avere, per ogni variabile di uscita, un valore crisp.



## Le inferenze

- Esistono diverse tipologie di inferenze:
  - the MAX-MIN method;
  - the MAX-DOT or MAX-PRODUCT method;
  - the AVERAGING method;
  - the ROOT-SUM-SQUARE (RSS) method.



## The MAX-MIN method

The MAX-MIN method tests the magnitudes of each rule and selects the highest one. The horizontal coordinate of the “fuzzy centroid” of the area under that function is taken as the output. This method does not combine the effects of all applicable rules but does produce a continuous output function and is easy to implement.



## The MAX-DOT method

- The MAX-DOT or MAX-PRODUCT method scales each member function to fit under its respective peak value and takes the horizontal coordinate of the “fuzzy” centroid of the composite area under the function(s) as the output.
- Essentially, the member function(s) are shrunk so that their peak equals the magnitude of their respective function (“negative”, “zero”, and “positive”). This method combines the influence of all active rules and produces a smooth, continuous output.



## The AVERAGING method

The AVERAGING method is another approach that works but fails to give increased weighting to more rule votes per output member function. For example, if three “negative” rules fire, but only one “zero” rule does, averaging will not reflect this difference since both averages will equal 0.5. Each function is clipped at the average and the “fuzzy” centroid of the composite area is computed.



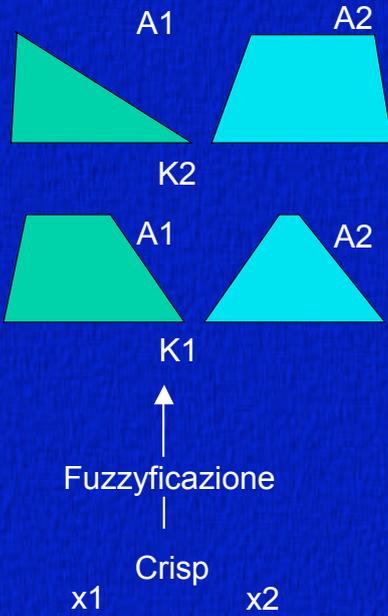
## The RSS method

The ROOT-SUM-SQUARE (RSS) method combines the effects of all applicable rules, scales the functions at their respective magnitudes, and computes the “fuzzy” centroid of the composite area. This method is more complicated mathematically than other methods.



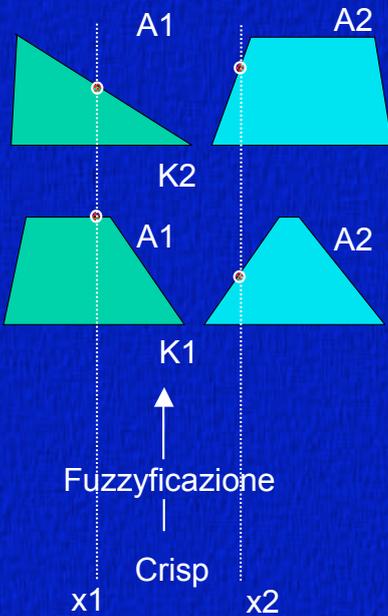
# Processo inferenziale

IF ( $x_1$  IS  $A_1^{k_1}$ ) AND ... AND ( $x_N$  IS  $A_N^{k_N}$ ) THEN ( $c_1$  IS  $C_1^{k_1}$ ) AND ... AND ( $c_M$  IS  $C_M^{k_M}$ )



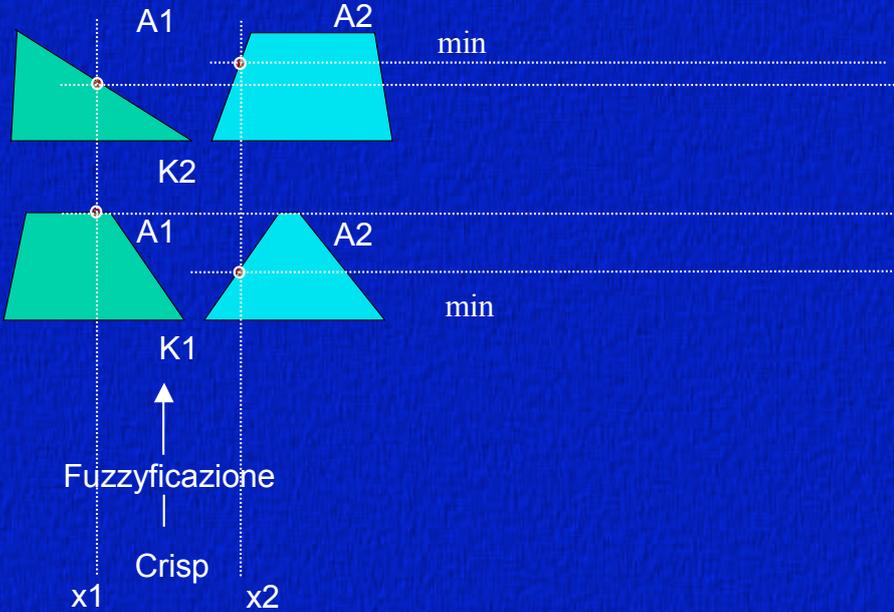
# Processo inferenziale

IF ( $x_1$  IS  $A_1^{k_1}$ ) AND ... AND ( $x_N$  IS  $A_N^{k_N}$ ) THEN ( $c_1$  IS  $C_1^{k_1}$ ) AND ... AND ( $c_M$  IS  $C_M^{k_M}$ )



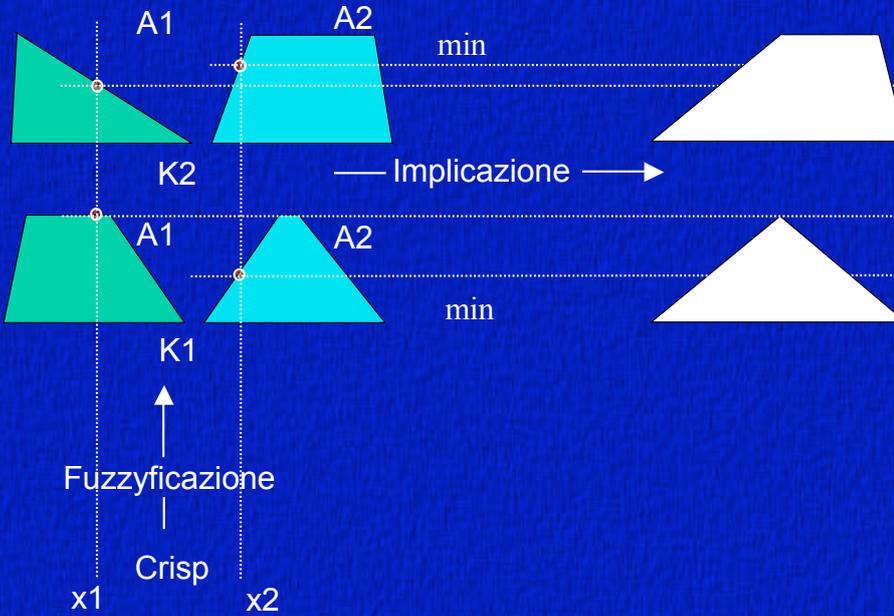
# Processo inferenziale

IF ( $x_1$  IS  $A_1^{k_1}$ ) AND ... AND ( $x_N$  IS  $A_N^{k_N}$ ) THEN ( $c_1$  IS  $C_1^{k_1}$ ) AND ... AND ( $c_M$  IS  $C_M^{k_M}$ )



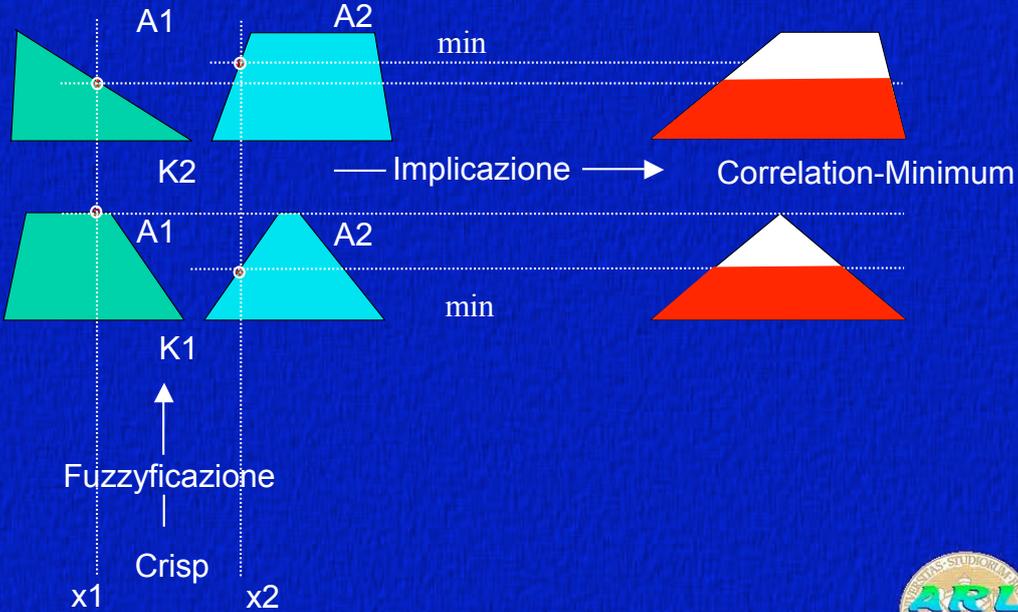
# Processo inferenziale

IF ( $x_1$  IS  $A_1^{k_1}$ ) AND ... AND ( $x_N$  IS  $A_N^{k_N}$ ) THEN ( $c_1$  IS  $C_1^{k_1}$ ) AND ... AND ( $c_M$  IS  $C_M^{k_M}$ )



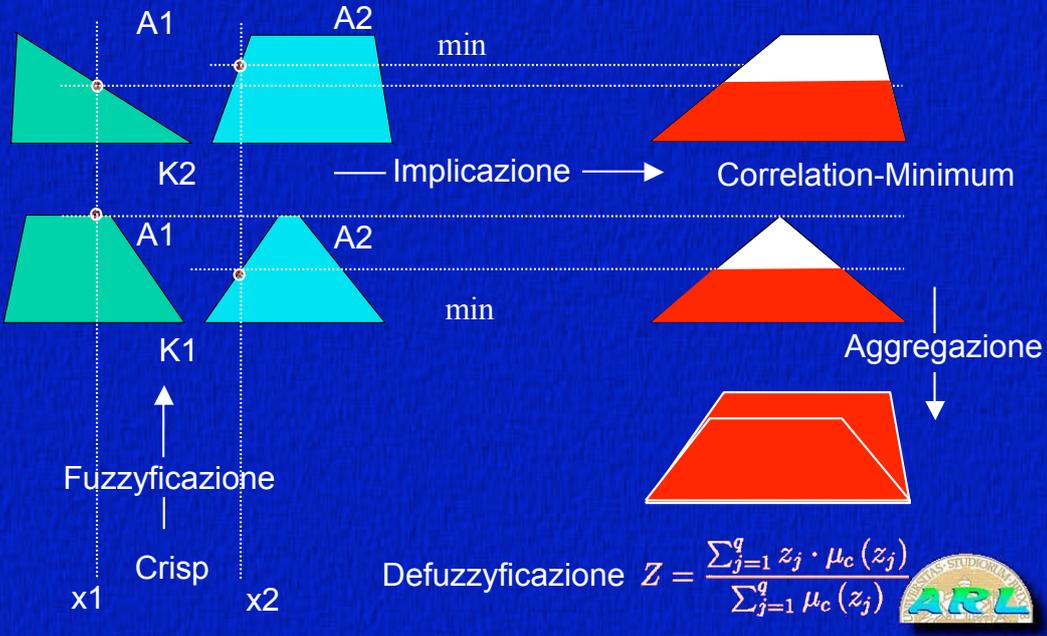
# Processo inferenziale

IF ( $x_1$  IS  $A_1^k$ ) AND ... AND ( $x_N$  IS  $A_N^k$ ) THEN ( $c_1$  IS  $C_1^k$ ) AND ... AND ( $c_M$  IS  $C_M^k$ )



# Processo inferenziale

IF ( $x_1$  IS  $A_1^k$ ) AND ... AND ( $x_N$  IS  $A_N^k$ ) THEN ( $c_1$  IS  $C_1^k$ ) AND ... AND ( $c_M$  IS  $C_M^k$ )

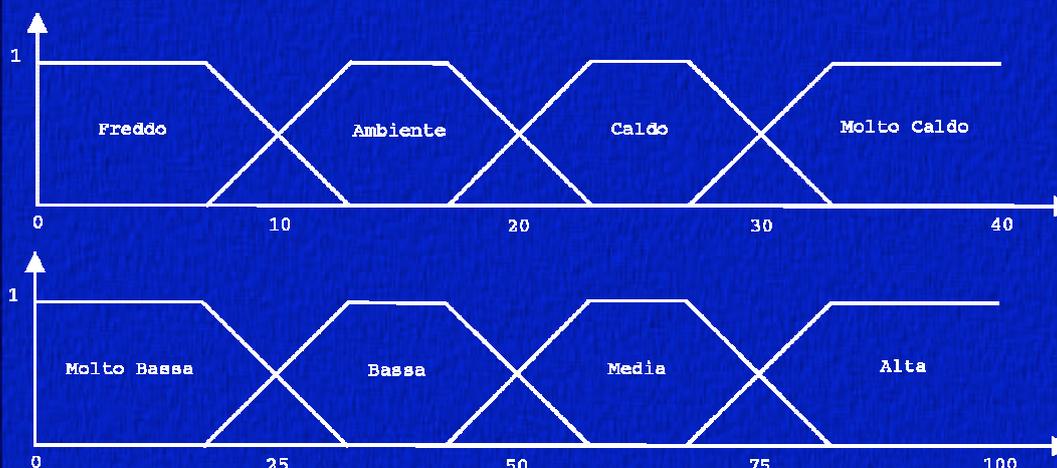


## Un esempio completo (1)

- Per comprendere appieno quanto esposto viene proposto un semplice esempio che evidenzia tutti i passaggi descritti.
- Si pensi di voler gestire un condizionatore mediante un motore inferenziale basato su logica fuzzy; consideriamo, per semplicità, che vi siano solo due ingressi (“temperatura” e “umidità”) e che vi sia un'uscita (“percentuale di potenza del condizionatore”).
- Per questo esempio si supponga che la temperatura spazi in un range che si estende dai 0 °C a 40 °C e che l'umidità vada da 0% al 100%.



## Un esempio completo (2)



## Un esempio completo (3)

- Poniamo che la temperatura sia di 28 °C e che l'umidità sia al 90%.
- Eseguendo la fuzzyficazione degli ingressi si ottengono i valori riportati in Tabella

Temperatura	<i>Freddo</i>	<i>Ambiente</i>	<i>Caldo</i>	<i>Molto Caldo</i>
28 °C	0	0	0.8333	0.1667
Umidità	<i>Molto Bassa</i>	<i>Bassa</i>	<i>Media</i>	<i>Alta</i>
90%	0	0	0	1

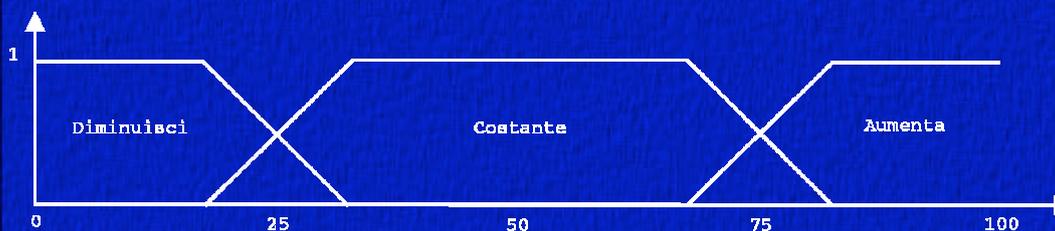
- Poniamo di avere alcune regole fuzzy:
  - se la temperatura è molto alta (molto caldo), la potenza del climatizzatore deve aumentare (aumenta);
  - se la temperatura è alta (caldo) e l'umidità è elevata (alta), la potenza del climatizzatore deve rimanere costante (costante);

→ ...



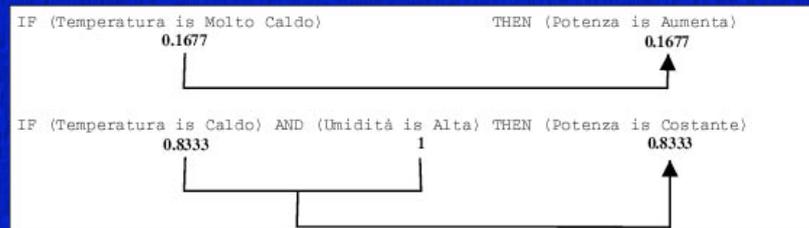
## Un esempio completo (4)

- Ovviamente dobbiamo conoscere anche la forma delle funzioni di appartenenza della variabile di uscita per scrivere le regole.



## Un esempio completo (5)

- Con questi valori si ottiene ciò che è rappresentato in figura.



- Una volta calcolati i baricentri delle funzioni di appartenenza della variabile di uscita (per diminuisce è 12.875, per costante è 50 e per aumenta è 87.125) si può attuare la defuzzyficazione che restituisce come risultato per questo esempio: 56.276.

$$Z = \frac{12.875 \cdot 0 + 50 \cdot 0.8333 + 87.125 \cdot 0.1667}{0.8333 + 0.1667} = 56.276$$



FINE

